数理解析研究所講究録
291巻 1977年 63-72

Zakharov-Shabat 方程式について

阪大 理 伊達悦朗

序. Zakharov-Shabat 方程式とは，二つの微分作用素

$$L = \sum_{j=0}^{n} u_j(x,y,t)\frac{\partial^j}{\partial x^j}, \quad M = \sum_{j=0}^{m} v_j(x,y,t)\frac{\partial^j}{\partial x^j},$$

u_j, v_j は ℓ 次の正方行列，を用いて

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial L}{\partial t} = [L, M]$$

と作用素方程式の形に表わされる，係数 u_j, v_j の成分についての非線型偏微分方程式のことである。

この方程式が考えられるようになった背景について，少し触れる。

1967年に，Gardner, Greene, Kruskal, Miura [3] は，Korteweg-de Vries (KdV) 方程式 $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$，$u = u(x,t)$ の急減少な初期値問題と，一次元 Schrödinger 作用素 $-\frac{d^2}{dx^2} + u(x,t)$ の逆散乱理論との間の関係を示した。Lax [6] は，この関係の一部に着目し，KdV 方程式が作用素方程式 $\frac{\partial L}{\partial t} = [A, L]$，$L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x,t)$，$A = -4\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3u(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + 3\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)$ と同値であることを示した。その後，作用素 L, A を取り替えることにより，物理等で現われる非線型方程式

が得られることが知られ．その方程式のN－ソリトン解と呼ばれる厳密解を求める方法も知られてきている。Zakharov, Shabat [8] は，逆散乱理論に於いて基本的な役割を果たす Gelfand－Levitan－Marchenko 方程式と呼ばれる積分方程式に着目し．上に述べた Zakharov－Shabat 方程式を導き，そのN－ソリトン解を求める方法を示した。以上はすべて急減少な解についての結果であるが，Novikov, Dubrovin, Its, Matveev [2, 7] は、KdV方程式の周期的問題について調べ、超楕円的な Riemann 面の理論との関係を示した。

Kricheber [4,5] は一般の Riemann 面から出発することにより，Zakharov－Shabat 方程式を導いた。ここでは，その Kricheber の仕事について述べる。簡単の為にスカラー作用素 ($\ell=1$) の場合だけを述べる。

1. 関数 $\Psi(x, y, t, P)$

$\mathcal{R}$ をコンパクトな Riemann 面とし、その種数 g は正であるとする。$\mathcal{R}$ の一点 P_0 を固定し，次の性質を持つ関数 $\Psi(x, y, t, P)$, $(x, y, t) \in U$ (U は $0 \in \mathbb{R}^3$ の近傍), $P \in \mathcal{R}$ を考える。

i) $\Psi(x, y, t, P)$ は $\mathcal{R}-\{P_0\}$ で有理型でその極は (x, y, t) に依らず，次数 g の一般因子 D となっている。（次数 g の因子が一般因子であるとは D の線型空間 $L(D)=\{f \in K(\mathcal{R}) : (f)+D \geq 0\}$

が一次元であるときをいう。)

ii) $z = 1/k$ を P_0 に於ける一つの局所変数とする時、$\Psi(x, y, t, P)$ は P_0 で次の形の真性特異点を持つ：

$$\Psi(x, y, t, P) = \exp(kx + Q(k)y + R(k)t)\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j(x, y, t) z^j\right)$$

$$Q(k) = a_n k^n + \cdots + a_0 \qquad a_j, b_k \in \mathbb{C}$$
$$R(k) = b_m k^m + \cdots + b_0$$

多項式 $Q(k)$, $R(k)$ が与えられれば、Akhiezer [1] の方法を用いることにより、$\Psi(x, y, t, P)$ は一意的に構成できる。

以下、その構成について述べる。

α_j, β_j $(j = 1, \cdots, g)$ を $\mathcal{R}$ の標準ホモロジー基底とする。$\omega_1, \cdots, \omega_g$ を第一種正規化微分の基底とする。つまり $\int_{\alpha_j} \omega_k = \delta_{jk}$ となるように定められているものとする。この時 $\tau_{jk} = \int_{\beta_j} \omega_k$ とおけば、行列 $T_g = (\tau_{jk})$ は対称で、$\mathrm{Im}(T_g)$ は正定値となることが知られている。

周期行列 $\Omega = (I_g, T_g)$ の列ベクトルから生成される $\mathbb{C}^g$ の lattice を Γ とおけば、$\mathbb{C}^g/\Gamma$ が $\mathcal{R}$ の Jacobi 多様体 $J(\mathcal{R})$ である。$\mathcal{R}$ から $J(\mathcal{R})$ への写像 w を次のように定義する：$Q \in \mathcal{R}$ を固定し、$w : \mathcal{R} \ni P \longmapsto w(P) = \left(\int_Q^P \omega_1, \cdots, \int_Q^P \omega_g\right) \in J(\mathcal{R})$.

この写像を因子群に線型に拡張し、同じく w で表わす。

ω_{P_0} を P_0 以外では正則で、P_0 で二位の極を持つ第二種正規化微分とする。(正規化とは $\int_{\alpha_j} \omega_{P_0} = 0$ となっていることをいい

う。）　$-\left(\int_Q^P \omega_{P_0}\right)^{-1}$ を P_0 での局所変数とする。

ω_Q, ω_R を P_0 以外では正則で、P_0 で $dQ(1/z)$, $dR(1/z)$ と同じ形の極を持つ第二種正規化微分とする。ω_{P_0}, ω_Q, ω_R は一意的に定まる。

$$\int_{\beta_j}\omega_{P_0} = 2\pi i A_j\ ,\quad \int_{\beta_j}\omega_Q = 2\pi i B_j\ ,\quad \int_{\beta_j}\omega_R = 2\pi i C_j \qquad i=\sqrt{-1}$$

とおき、　$A=(A_1,\cdots,A_g)$, $B=(B_1,\cdots,B_g)$, $C=(C_1,\cdots,C_g)$ とおく。

Ψ を構成するには Jacobi の逆問題

$$(*)\qquad w\left(\sum_{j=1}^g P_j(x,y,t)\right) \equiv -xA - yB - tC + w(D) \quad (\mathrm{mod}\ \Gamma)$$

$D=\sum_{j=1}^g P_j$ は極因子

を解けばよいことが次のようにしてわかる。

Ψ が存在したとすれば、$\omega = d\log\Psi$ は R 上の Abel 微分となっている。極の様子を調べることにより

$$(**)\quad \omega = x\omega_{P_0} + y\omega_Q + t\omega_R + \sum_{j=1}^g \omega(P_j(x,y,t), P_j) + \sum_{j=1}^g c_j\omega_j\ ,$$

$P_j(x,y,t)$ は Ψ の零点、$\omega(P,Q)$ は P, Q 以外では正則で P, Q でそれぞれ留数 1, −1 の一位の極を持つ第三種正規化微分、と表わされる。ここで c_j は一応未定である。Ψ が R 上一価であることから　$\int_{\alpha_k}\omega = 2\pi i m_k$　　$\int_{\beta_k}\omega = 2\pi i n_k$　　$m_k, n_k \in \mathbb{Z}$

である。第一の関係式から　$c_j = 2\pi i m_j$ が従う。第二の関係式から，$\int_{\beta_j}\omega(P,Q) = 2\pi i\int_Q^P\omega_j$ を用いて上の式が得られる。

逆に Jacobi の逆問題（*）を解いて，$P_1(x,y,t),\cdots,P_g(x,y,t)$ を求め（**）で ω を定め、$\exp(\int_Q^P\omega)$ をつくればこれは定数倍

を除いてΨに一致している。因子Dが一般因子であるとしたから、$0 \in \mathbb{R}^3$のある近傍Uに含まれる(x, y, t)に対して、$P_1(x, y, t), \cdots, P_g(x, y, t)$は一意に定まっている。

ΨをRiemannのテータ関数を用いて表わすことを考える。Riemannのテータ関数とは

$$\vartheta(u) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} \exp\left[2\pi i\, u\, {}^t m + \pi i\, m T_g {}^t m\right]$$

$$u = (u_1, \cdots, u_g) \in \mathbb{C}^g$$

で定義される、g変数関数である。

テータ関数については、次の事実が知られている：

δを次数gの正因子とするとき、関数$\vartheta(w(P) - w(\delta) + K)$は$P$の関数として恒等的には零にならず、その零因子は$\delta$である。ここで$K$は$\alpha_j, \beta_j, \omega_j$から定まるRiemannの定数ベクトルと呼ばれるものである。

従って$\delta = \sum_{j=1}^{g} P_j$, $\delta' = \sum_{j=1}^{g} Q_j$を二つの一般因子とするとき、

$$d \log\left(\vartheta(w(P) - w(\delta) + K) / \vartheta(w(P) - w(\delta') + K)\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{g} \omega(P_j, Q_j)$$

となる。

このことから

$$\Psi(x, y, t, P) = \exp\left[x \int_Q^P \omega_{P_1} + y \int_Q^P \omega_Q + t \int_Q^P \omega_R\right] \times$$
$$\times \frac{\vartheta(w(P) + Ax + By + Ct - w(D) + K)}{\vartheta(w(P) - w(D) + K)}$$

と表わされる。この式から $\xi_j(x,y,t)$ がテータ関数で表示できることもわかる。

2. $\Psi(x,y,t,P)$ のみたす二つの微分方程式と Zakharov–Shabat 方程式

次の定理が成り立つ。

定理 $\Psi(x,y,t,P)$ は二つの微分方程式

$$L\Psi = \sum_{j=0}^{n} u_j(x,y,t)\frac{\partial^j\Psi}{\partial x^j} = \frac{\partial\Psi}{\partial y}$$

$$M\Psi = \sum_{j=0}^{m} v_j(x,y,t)\frac{\partial^j\Psi}{\partial x^j} = \frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

をみたす。u_j. v_j は、$a_j, b_j, \frac{\partial^k\xi_l}{\partial x^i}$ の多項式で、一意に定まり、特に、$u_n = a_n,\ u_{n-1} = a_{n-1},\ v_m = b_m,\ v_{m-1} = b_{m-1}$ である。

証明 P_0 に於いて

$$\frac{\partial\Psi}{\partial y} = \exp(kx + Q(k)y + R(k)t)\Big[\sum_{l=0}^{n}\Big(\sum_{\alpha=l}^{n}\xi_{\alpha-l}a_\alpha\Big)k^l + \text{regular}\Big]$$

$$\frac{\partial^\alpha\Psi}{\partial x^\alpha} = \exp(kx + Q(k)y + R(k)t)\Big[\sum_{\beta=0}^{\alpha}{}_\alpha C_\beta\sum_{l=0}^{\beta}\frac{\partial^{\alpha-\beta}\xi_{\beta-l}}{\partial x^{\alpha-\beta}}k^l + \text{regular}\Big]$$

である。

$\sum_{\alpha=0}^{n}u_\alpha\frac{\partial^\alpha\Psi}{\partial x^\alpha}$ と $\frac{\partial\Psi}{\partial y}$ の k^l $(l = 0,\cdots,n)$ の係数を比較すれば

$$\sum_{\alpha=l}^{n}\sum_{\beta=l}^{\alpha}{}_\alpha C_\beta\, u_\alpha\frac{\partial^{\alpha-\beta}\xi_{\beta-l}}{\partial x^{\alpha-\beta}} = \sum_{\alpha=l}^{n}\xi_{\alpha-l}a_\alpha$$

である。これは $l = n$ から順次解ける。u_α をこのように定めておけば

$$\Big(\frac{\partial\Psi}{\partial y} - \sum_{j=0}^{n}u_j\frac{\partial^j\Psi}{\partial x^j}\Big)\Big/\Psi \in L\Big(\sum_{j=1}^{g}P_j(x,y,t)\Big)$$

となる。因子 $\sum_{j=1}^{g}P_j(x,y,t)$ は $(x,y,t)\in U$ の時、一般因子であ

るから．上の線型空間は一次元であり．関数 $\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} - \sum_{j=0}^{n} u_j \frac{\partial^j \Psi}{\partial x^j}\right) / \Psi$ は定数となる。この関数は P_0 で零になるから．定数は零である。$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \sum_{j=0}^{m} v_j \frac{\partial^j \Psi}{\partial x^j}$ も同様にして示される。（証終）

この定理から

$$\left[L - \frac{\partial}{\partial y}, M - \frac{\partial}{\partial t}\right] \Psi = 0$$

である．Ψ が《十分多く》あることから

$$\left[L - \frac{\partial}{\partial y}, M - \frac{\partial}{\partial t}\right] = 0$$

となる。こうして Zakharov-Shabat 方程式が得られ．テータ関数で表示される解があることも示された。

R 上に P_0 以外では正則で．P_0 で $Q(k)$ の形の主要部を持つ有理型関数 $E(P)$ が存在すれば．$\Psi(x, y, t, P) = \tilde{\Psi}(x, t, P) e^{yE(P)}$ と分離され．この時は Lax 表示

$$\frac{\partial L}{\partial t} = [M, L]$$

が得られる。

例を示す。

$$Q(k) = k^2, \quad R(k) = k^3 + bk$$

とおけば

$$\frac{3}{2} u_y = -\frac{3}{2} u_{xx} + 2 v_x$$

$$v_y - u_t = v_{xx} - u_{xxx} - \frac{3}{2} u u_x - b u_x \qquad u = -2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x}$$

が得られる。

vを消去すれば Kadomchev − Petviaschuli の方程式

$$\frac{3}{4}u_{yy} - u_{xt} + \frac{1}{4}u_{xxxx} + \frac{3}{2}(uu_x)_x + bu_{xx} = 0$$

が得られる。この方程式は dispersive な媒質内の波の二次元の非定常問題を記述している。$u(x.y.t)$ はテータ関数を用いれば

$$u(x.y.t) = E + 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log\vartheta(Ax + By + Ct + F)$$

と表示される。

$\mathcal{R}$ 上に、P_0 以外では正則で、P_0 で二位の極を持つ有理型関数が存在すれば、この時 $\mathcal{R}$ は超楕円的で、P_0 はその Weierstrass 点でなくてはならないが、その時

$$u_t = \frac{1}{4}u_{xxx} + \frac{3}{2}uu_x$$

が得られる。これは $t \to 4t$ と変数変換すれば KdV 方程式である。

P_0 で $k^3 + bk$ の形の極を持ち、他では正則な有理型関数が存在すれば Bousimesque の方程式が得られる。この方程式は KdV 方程式より前に、水の波を記述するものとして知られていたものである。

引用文献

1. N. I. Akhiezer, A continuous analogue of orthogonal polynomials on a system of intervals, Soviet Math. Dokl. 2 (1961), 1409 - 1412

2. B. A. Dubrovin, V. B. Matveev and S. P. Novikov, Nonlinear equations of Korteweg - de Vries type, finite - zonal linear operators and abelian varieties, Uspehi Math. Naus 31 (1976), 55 - 136 (Russian)

3. O. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal and R. M. Miura, A method for solving the Korteweg - de Vries equation, Phys. Rev. Lett. 19 (1967), 1095 - 1098

4. I. M. Kricheber, Algebro - geometric construction of Zakharov - Shabat equation and its periodic solutions, Dokl. Akad. Nauk USSR 227 (1976), 291 - 294 (Russian)

5. ______________, Algebraic curves and commuting matrix differential operators, Functional Anal. and Its Appl. 10 (1976), 75 - 76 (Russian)

6. L. D. Lax, Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves, Comm. Pure and Appl. Math 21 (1968), 467 - 490

7. S. P. Novikov, The periodic problem for the Korteweg-de Vries equation I, Functional Anal. and Its Appl. 8 (1974), 236–246

8. V. E. Zakharov and A. B. Shabat, A scheme for integrating the nonlinear equations of mathematical physics by the method of the inverse scattering problem I, Functional Anal. and Its Appl. 8 (1974), 226–235